Брянский институт повышения квалификации работников образования

Н.Е. Марюкова, Н.И. Васечкина,
Н.М. Руденкова

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ И ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ.
ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Методическое пособие по решению задач

Брянск
2004

ББК.74.262
М 25

Марюкова Н.Е. Васечкина Н.И., Руденкова Н.М. Замечательные линии и точки в треугольнике. Площадь треугольника: Методическое пособие по решению задач. - Брянский ИПКРО. - 2004. – 40 с.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Брянского института повышения квалификации работников образования.

Методическое пособие посвящено решению задач по основным темам школьного курса планиметрии, связанным с геометрией треугольника. Показаны пути преодоления трудностей, возникающих у учащихся при их решении, этапы и методы. Содержится 115 задач разного уровня сложности, в том числе и конкурсных экзаменов для поступающих в вузы. В темах выделены опорные задачи.

Предназначено для учителей и учащихся обычных классов и классов с углубленным изучением математики. Может быть использовано для организации уроков повторения, индивидуальной работы с учащимися, при подготовке их к конкурсным экзаменам, на занятиях со студентами педвузов.

Рецензенты:

Тонких А.П., доцент БГПУ, кандидат физико-математических наук;
Баранова Н.Н., учитель математики лицея № 1 г. Брянска, Заслуженный учитель школы РФ.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие посвящено решению задач по основным темам школьного курса планиметрии, связанным с геометрией треугольника.

Решение задач – важный аспект изучения геометрии. Известный математик Д. Пойа в своей книге «Математическое открытие» [6, с. 16] так пишет о роли обучения решению задач в учебном процессе: «В математике владение предметом гораздо важнее, чем одно чистое знание, которое всегда можно пополнить из справочников. Поэтому в средней школе и в учебных заведениях других рангов мы обязаны не только сообщать учащимся известные знания, но – и это гораздо важнее – научить их в какой-то степени владеть предметом. А владение математикой есть умение решать задачи… Поэтому первая и самая главная обязанность курса математики средней школы состоит в подчеркивании *методической стороны процесса решения задачи*… Учитель должен показывать учащимся, как решать задачи».

Этот принцип положен в основу экспериментального пособия для 7 класса «Геометрия 7: Теория и задачи» И.Ф. Шарыгина [10], что отражено уже в самом названии пособия: «Теория и задачи». И.Ф. Шарыгин пишет: «Я считаю, что *обучение методом решения геометрических задач* является важнейшей целью геометрического обучения, а поэтому в курсе геометрии, в учебнике по геометрии надо не только выстраивать теорию, но и изучать методы решения геометрических задач» [10, с. 7].

Однако, как показывают результаты школьных и вступительных экзаменов в вузы, многие учащиеся испытывают затруднения при решении геометрических задач. Очень часто затруднения связаны с неумением учащихся читать условие задачи, работать с ним, делать чертеж, соответствующий условию задачи. В самом деле, при работе с условием задачи ученик должен уметь выделить понятия, встречающиеся в тексте задачи, дать их определения, указать свойства фигур, связанных с условием задачи, и уметь отобрать те из свойств, которые нужны для решения задачи. Такая деятельность, конечно, для большинства учащихся является очень сложной. Как правило, учащиеся не пользуются при этом никакой методикой, а действуют «вслепую», полагаясь на собственный опыт и удачу, потому что целенаправленная работа по формированию у учащихся умений работы с условием задачи учителем не ведется.

В то же время существует литература, посвященная методической стороне процесса решения задач. Помимо названных книг [6] и [10], а также известных книг Д. Пойа [7] и [8], здесь следует отметить весьма полезную для учителя книгу В.А. Гусева «Как помочь школьнику полюбить математику» [4], в которой анализируется процесс решения задачи, в соответствии с этим анализом предлагаются этапы решения геометрических задач, описывается их сущность и приводятся примеры решения задач. Использование рекомендаций этой книги сделает работу учителя по обучению решению задач более эффективной.

ГЛАВА I. ЭТАПЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§ 1. Этапы решения геометрических задач (приводятся по книге В.А. Гусева «Как помочь школьнику полюбить математику» [4])

1. Анализ условия задачи с целью выявления элементов задачи.

Элементы задачи [4, с. 95] – это те геометрические фигуры и основные отношения, которые входят в текст задачи. Основных отношений всего 4: равенство, подобие, параллельность и перпендикулярность. Число элементов задачи может быть различным. Элементы задачи автор рекомендует выписывать, при этом выделяя неизвестные элементы задачи подчеркиванием. Эта работа не вызывает затруднений у учащихся, но является весьма полезной, так как позволяет систематизировать понятия, повторить их определения, выделить данные и неизвестные элементы задачи.

2. Конкретизация условия задачи на чертеже.

Этот этап состоит из выполнения чертежа, соответствующего условию задачи. Чертеж выполняется по элементам задачи и после выполнения первого этапа не представляет затруднений. В результате условие задачи представляется не в абстрактном, а в наглядном виде – в виде конкретных треугольников, углов и т.д. на чертеже.

3. Выделение фигур, попадающих под данный элемент задачи [4, с. 98].

На этом этапе нужно выписать (перечислить, увидеть) все фигуры, изображенные на чертеже, соответствующие данному элементу задачи, т.е. являющиеся его изображением на чертеже.

4. Установление связей между фигурами, попадающими под элемент задачи.

Это означает, что мы должны перечислить свойства указанных фигур и выбрать те из этих свойств, которые могут привести к решению задачи. Таким образом, на этом этапе происходит актуализация теоретических знаний учащихся по геометрии. Поначалу учащийся перебирает в произвольном порядке все свойства из известного ему набора свойств фигур, а потом, накопив опыт в решении задач, действует более рационально, выбирая только те свойства, которые представляются ему наиболее полезными для достижения цели.

5. Установление связей между связями (сравнение свойств).

Это не воспроизведение знаний по геометрии, как это было на предыдущем этапе, а анализ выделенных свойств, который приводит к решению задачи. Это самый трудоемкий этап. Причем часто встречаются задачи, для которых простое сравнение свойств фигур, попадающих под элементы задачи, не приводит к решению. В этих случаях выручает введение дополнительных элементов, т.е. выполнение дополнительных построений.

В книге [4, с. 92-123] эти этапы с примерами применения в практике решения задач рассмотрены подробно и показаны преимущества следования этой схеме при обучении решению задач. Таким образом, можно организовать работу по формированию умений работы с условием задачи.

§ 2. Методы решения геометрических задач

1. Метод ключевого треугольника (название взято из учебного пособия [10, с. 99]).

Суть метода в том, что в заданной фигуре надо найти треугольник или несколько треугольников, к изучению которых сводится решение задачи. Этим методом решается очень большое количество задач.

2. Метод равных и подобных треугольников.

Для решения многих задач достаточно выписать соотношения, вытекающие из равенства или подобия треугольников.

3. Алгебраический метод.

Применяется при решении задач на вычисление и на построение.

Суть этого метода в том, что искомая величина выражается через известные величины, которые либо даны, либо могут быть вычислены (построены), исходя из условия задачи. В задачах на вычисление неизвестная величина чаще всего означает величину угла, длину отрезка, площадь треугольника.

4. Векторный метод.

В геометрии является одним из мощных методов решения задач.

С помощью векторов можно кратко записывать формулировки задач, теорем и их решения и доказательства. При решении задач этим методом используются операции сложения векторов, умножения вектора на число и скалярное произведение векторов.

5. Координатный метод.

Позволяет переписать геометрическую задачу на языке алгебры. Для этого вводим систему координат, тогда каждая точка однозначно определяется своими координатами, а фигура – уравнением, неравенством или их системой. Выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы применяет алгебру и анализ к решению геометрических задач и доказательству теорем. Обратно, используя координаты, мы можем истолковывать алгебраические соотношения и факты геометрически, т.е. применять геометрию к алгебре и анализу. Графики функций – первый пример такого применения координат.

6. Метод преобразований (параллельного переноса, поворота, в частности, центральной симметрии, осевой симметрии, гомотетии и подобия).

Применяется при решении всех типов задач – на вычисление, доказательство и построение. Целесообразность применения каждого из названных преобразований диктуется условием задачи.

7. Метод дополнительных построений.

Выделен в отдельный метод в виду его важности для решения многих задач, например, таких, для которых применение других перечисленных выше методов не ведет к решению. Однако дополнительные построения сами по себе не дают решения задачи, а только готовят почву для получения решения другими методами.

Увидеть нужное дополнительное построение могут не все учащиеся. Часто учащиеся выполняют дополнительные построения наугад, вслепую. Иногда такая проба оказывается удачной, иногда нет. Однако существуют типичные дополнительные построения, использование которых в сходных ситуациях почти всегда ведет к успеху. Например, к таким построениям относится продолжение медианы треугольника на равное ей расстояние. Классификация дополнительных построений, применяемых при изучении планиметрии в средней школе, дана Е.В. Силаевым [9].

Следует отметить, что одна и та же задача может иметь несколько решений (различных методов решений) и даже в одном решении может быть использована комбинация различных методов решений.

Глава II. Задачи

Сведения, изложенные в главе I, являются необходимыми предпосылками для выработки навыков решения задач. Успешность использования этих сведений зависит, естественно, от знания теорем планиметрии и умения их применять. Вопрос актуализации имеющихся у учащихся знаний вообще очень важен, а для решения задач – в особенности. Поэтому мы располагаем задачи по темам, сообщая в каждой теме необходимые теоретические сведения (известные из школьного курса – без доказательства, новые – с доказательством) в виде опорных задач. Разделение задач по темам, конечно же, не может быть произведено однозначно. Например, задача о нахождении длины медианы прямоугольного треугольника может быть отнесена и к теме «Медианы треугольника», и к теме «Прямоугольный треугольник». Задачи по теме «Прямоугольный треугольник» часто встречаются в других темах, например, «Высота треугольника», «Площадь треугольника» и др.

В каждой теме сосредоточено большое количество задач для решения, что позволяет надеяться на выработку достаточно устойчивых умений решать задачи по данной теме. По своему уровню это нестандартные задачи повышенной трудности школьных учебников, а также задачи конкурсных экзаменов в вузы. Мы старались расположить задачи по мере возрастания их сложности в каждой теме.

Задачи этой главы могут быть использованы в обычных классах и классах с углубленным изучением математики для организации уроков повторения и систематизации знаний, для организации индивидуальной работы с учащимися, для проведения факультативных занятий, а также для подготовки к конкурсным экзаменам в вуз. Разбивка задач по темам школьного курса и наличие указаний к решениям, обсуждение методов решения задач делают данное пособие более удобным для практического использования как учителем, так и учеником.

Каждая тема содержит опорные задачи – теоретические сведения, применяемые для решения задач, задачи для решения, ответы и указания к решениям задач.

Список обозначений:

В треугольнике АВС:

a, b, c – стороны (длины сторон) ВС, СА, АВ соответственно (a = ВС, b = СА, c = АВ);

$\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ – углы (величины углов);

m_a, m_b, m_c – длины медиан, проведенных к сторонам a, b, c соответственно;

h_a, h_b, h_c – длины высот, проведенных к сторонам a, b, c соответственно;

$2p = a + b + c$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ – периметр и полупериметр треугольника;

r – радиус окружности, вписанной в треугольник,

R – радиус окружности, описанной около треугольника,

S_{ABC} – площадь треугольника АВС.

С помощью значка $\cap$ записывается пересечение фигур. Например, прямые a и b пересекаются в точке c, мы записываем следующим образом:

$a \cap b = c$.

Знаком ~ обозначается подобие фигур.

Знаком - ! - на полях отмечаются опорные задачи

§ 1. Медианы треугольника

Центр тяжести (центроид) треугольника

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Опорные задачи

!1. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины, из которой выходит соответствующая медиана.

Эта задача может быть решена разными методами. Она присутствует в виде теоремы в школьных учебниках и имеет очень важное значение для решения задач.

Точка пересечения медиан треугольника называется его центром тяжести, или центроидом этого треугольника, так как она совпадает с центом тяжести плоской однородной треугольной пластины.

!2. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

!3. Обратно: если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный (из вершины прямого угла выходит данная медиана).

Для решения задач 2 и 3 достаточно заметить, что медиана равна радиусу окружности, описанной около треугольника.

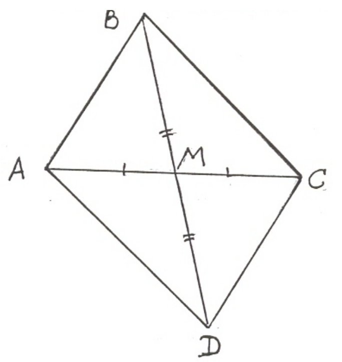

Рис. 1

При решении задач, связанных с медианами треугольника, очень часто применяется стандартное дополнительное построение: продолжение медианы треугольника на равное ей расстояние, в результате чего треугольник достраивается до параллелограмма (рис. 1), так как диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам. Пользуясь известным свойством параллелограмма: «сумма квадратов его диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон», можно решить следующие опорные задачи.

!4. Выразить длины медиан треугольника через длины его сторон.

Решение. В параллелограмме АВСД (рис. 1) $ВД^2 + АС^2 = 2(АВ^2 + ВС^2)$. Подставляя в это равенство ВД = 2ВМ = $2m_b$, АС = b, АВ = c, ВС = a (см. обозначения на с.), получаем $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$.

Аналогично, $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$.

!5. Выразить длину стороны треугольника через длины его медиан.

Решение. В параллелограмме ВМСД (рис. 2), полученном при продолжении медианы МК треугольника ВМС на равное ей расстояние КД, $ВС^2 + МД^2 = 2(ВМ^2 + МС^2)$.

Подставляя сюда значения ВС = a, МД = 2МК = $2\cdot\frac{1}{3}AK = \frac{2}{3}m_a, BM = \frac{2}{3}m_b, MC = \frac{2}{3}m_c$ (по задаче 1), получаем

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2}.$$

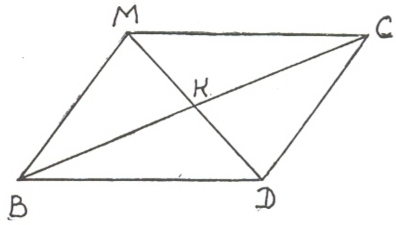

Рис. 2

Аналогично,

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2+m_c^2)-m_b^2},$$

$$c = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2+m_b^2)-m_c^2}.$$

Задачи для решения

6. AB = 6, BC = 8, BM = 5 (рис. 1). Найти углы, образованные медианой BM со сторонами AB и BC треугольника ABC.

Указание: продолжить медиану BM, как на рис. 1, и рассмотреть два треугольника BСД и AВД, в которых известны три стороны. Применить теорему косинусов к каждому треугольнику. Можно ограничиться одним треугольником, так как углы AВД и ВДС равны.

7. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4 см, медиана, проведенная к боковой стороне, равна 3 см. Найти основание треугольника.

8. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5 см. Найти длину боковой стороны.

9. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1:2. Найти стороны треугольника.

10. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол в отношении 1:2.

11. В прямоугольном треугольнике медианы, проведенные к катетам, равны $\sqrt{52}$ *и* $\sqrt{73}.$ Найти гипотенузу треугольника.

12. Медианы треугольника равны 5, $\sqrt{52}$ *и* $\sqrt{73}.$ см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

13. Числа m_1, m_2, m_3 выражают длины медиан некоторого треугольника. Показать, что если выполняется равенство $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$, этот треугольник прямоугольный.

14. Две стороны треугольника равны 6 и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти третью сторону треугольника.

15. Найти третью сторону остроугольного треугольника, если две его стороны равны a и b и известно, что медианы треугольника, проведенные к этим сторонам, пересекаются под прямым углом.

16. Найти расстояние от точки пересечения медиан треугольника до его вершин, если стороны треугольника равны 5, 6 и 8 см.

17. Найти отношение суммы квадратов всех медиан треугольника к сумме квадратов всех его сторон.

18. Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, ее заключающих.

19. Доказать, что во всяком треугольнике сумма медиан больше $\frac{3}{4}$ периметра, но меньше периметра.

20. M – точка пересечения медиан ΔABC. В каком отношении делит медиану m_b прямая, проходящая через точку C и середину AM?

21. Определить площадь треугольника, зная две его стороны 27 и 29 см и медиану 26 см, проведенную к третьей стороне.

Ответы и указания к решениям

6. arccos 0,6; arccos 0,8.

7. $\sqrt{10}$ см. Применить задачу 4.

8. 6 см. Применить задачу 4.

9. $m, m\sqrt{3}, m\sqrt{2}.$ По задаче 2 гипотенуза равна 2m, два получившихся треугольника равнобедренные с углами при основании 60° и 30°.

10. 30° и 60°. Применить задачу 2.

11. 10. Воспользоваться задачами 2 и 5, тогда для гипотенузы c будем иметь $c = \frac{2}{3}\sqrt{2(73+52) - \frac{c^2}{4}}$, *так как* $m_c = \frac{c}{2}$, откуда и находим c.

12. Используя задачу 5, найти стороны треугольника и проверить, что для них выполняется теорема Пифагора.

13. Решение аналогично решению задачи 12.

14. $2\sqrt{5}$ см. Решение. Пусть a = 8, b = 6, c = x (рис. 3). Так как медианы перпендикулярны, то треугольник АМВ прямоугольный и по теореме Пифагора x^2 = АМ^2 + ВМ^2 = $\frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2)$. Используя задачу 4, получаем, что

$m_a^2 + m_b^2 = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 + 4x^2)$. Отсюда $x^2 = \frac{1}{9}(b^2 + a^2 + 4x^2)$. Подставляя в полученное равенство данные задачи, получаем $x^2 = 20$.

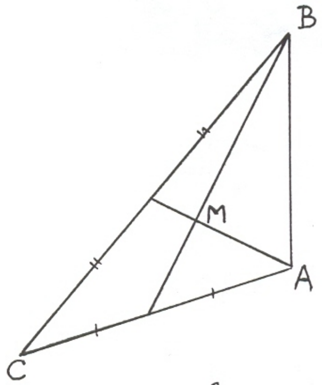

Рис. 3

15. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. См. решение задачи 13.

16. $\frac{5\sqrt{7}}{3}, \frac{\sqrt{142}}{3}, \frac{\sqrt{58}}{3}$. Искомые расстояния равны $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c$, далее применяем задачу 4.

17. $\frac{3}{4}$. Решение. Применяем задачу 4:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$$

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Сложим эти равенства почленно: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{4}(3a^2 + 3b^2 + 3c^2)$.

Из полученного *равенства* следует ответ задачи.

18. Самое простое решение этой задачи состоит в применении дополнительного построения, как на рис. 1. Тогда в ΔВСД сторона ВД меньше

суммы двух других сторон ВС и СД, но СД = АВ, ВД = 2ВМ, поэтому ВМ$<\frac{1}{2}(BC+AB)$, или $m_b<\frac{1}{2}(a+c)$. Аналогично, $m_a<\frac{1}{2}(b+c), m_c<\frac{1}{2}(a+b)$.

19. Неравенство $m_a+m_b+m_c<a+b+c$ получается почленным сложением неравенств, полученных при решении задачи 18. Для доказательства неравенства $m_a+m_b+m_c>\frac{3}{4}(a+b+c)$ необходимо записать неравенство для сторон ΔВМС (рис. 2): ВМ+МС>ВС. Но ВМ = $\frac{2}{3}m_b, MC=\frac{2}{3}m_c, BC=a,$ поэтому $m_b+m_c>\frac{3}{2}a.$ Аналогично, $m_a+m_b>\frac{3}{2}c$, $m_a+m_c>\frac{3}{2}b$. Сложив почленно эти неравенства, получаем

$$2(m_a+m_b+m_c>\frac{3}{2}(a+b+c),$$ откуда и следует доказываемое неравенство.

20. 8:1. Пусть К – середина АМ (рис. 4), CK∩BL = N. Нужно найти отношение BN:NL. Решение задачи сводится к рассмотрению ΔAMC, в котором CK и ML – медианы, следовательно, точка N – точка пересечения медиан ΔAMC. Тогда по задаче 1 MN:NL = 2:1, т.е. MN = 2NL. Но так как BM = 2ML (M – точка пересечения медиан ΔABC!) и ML = 3NL, то BN = BM + MN = 2·3·NL + 2·NL = 8NL, поэтому BN:NL = 8:1.

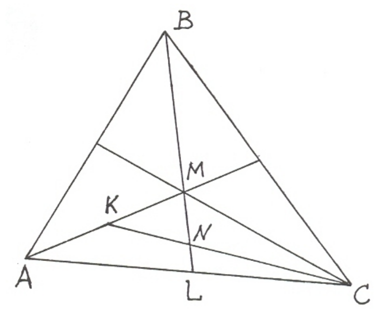

Рис. 4

21. 270 см^2. Воспользуемся рис. 1. Пусть АВ = c = 27 см, ВС = a =29см, ВМ=m_b=26см.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCД}$, *но* $S_{ABД}=\frac{1}{2}S_{ABCД}$, *поэтому* $S_{ABC}=S_{ABД}$, *а* $S_{ABД}$ легко вычисляется по формуле Герона.

§ 2. Прямоугольный треугольник

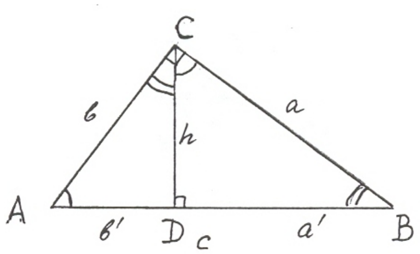

Рис. 5

Пусть угол С равен 90°.

Напомним известные факты для прямоугольного треугольника АВС:

1) сумма острых углов равна 90°;

2) теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$;

3) обратная к теореме Пифагора. Если для сторон треугольника выполняется соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный;

4)

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{h}{b}, \cos A = \frac{b}{c} = \frac{b'}{b}, tgA = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b} = \frac{h}{b'}, ctgA = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b}{a} = \frac{b'}{h}.$$

Аналогичные формулы имеют место для тригонометрических функций угла В;

5) задачи 2 и 3 о медиане, проведенной из вершины прямого угла.

Опорные задачи

!22. Пусть СД – высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника. Углы, отмеченные на рис.5 одинаковыми дугами, равны, а треугольники АСД и ВСД подобны между собой и подобны исходному треугольнику АВС.

!23. Пусть СД – высота, опущенная на гипотенузу АВ прямоугольного треугольника АВС. Тогда СД^2 = АД·ДВ, АС^2 = АД·АВ, СВ^2 = ВД·АВ, СД=$\frac{AC \cdot CB}{AB}$.

Решение задачи 23 следует из подобия треугольников задачи 22.

!24. R = $\frac{c}{2}$ – радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности.

!25. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности

$r = \frac{1}{2}(a+b-c) = p-c,$ где p – полупериметр треугольника.

Доказательство. На рис. 6 K, M, N – точки касания окружности со сторонами треугольника. Касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, поэтому АК = АМ = АС – КС = $b - r$, ВМ = BN = ВС – CN= $a - r$.

Тогда АВ = c = АМ + ВМ = $a + b - 2r$, т.е. $c = a + b - 2r$,

откуда $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$. Преобразуя это выражение дальше, получаем

$$r = \frac{1}{2}(a+b+c-2c) = \frac{1}{2}(2p-2c) = p-c.$$

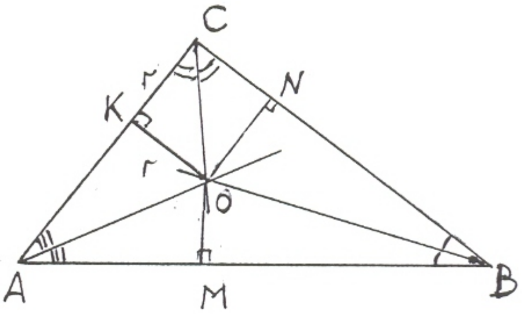

Рис. 6

Задачи для решения

26. Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, медиана, проведенная к этому катету, равна 5 см. Найти гипотенузу.

27. Высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки 24 и 54 см. Найти катеты.

28. Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, проекция этого катета на гипотенузу равна 2 см. Найти гипотенузу и другой катет.

29. Один катет прямоугольного треугольника равен 5, проекция другого катета на гипотенузу равна $\frac{9}{4}$. Найти гипотенузу.

30. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если его стороны образуют арифметическую прогрессию с разностью 1.

31. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15 см. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной окружности?

32. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности катетов. Найти отношение большего катета к меньшему.

33. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4 см. Найти радиус окружности, проходящей через концы меньшего катета и середину большего.

34. Чему равен острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника?

35. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

36. Периметр прямоугольного треугольника равен 60 см, высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см. Найти стороны треугольника.

37. В прямоугольном треугольнике высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, относятся как 40:41. Найти отношение катетов.

38. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

39. Определить углы прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанной около него окружности относится к радиусу вписанной в него окружности как 5:2.

40. В прямоугольном треугольнике АВС из вершины С прямого угла опущена высота СН. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники АСН и ВСН, равны r_1 и r_2. Найти радиус окружности, вписанной в ΔАВС.

41. В прямоугольном треугольнике АВС из вершины С прямого угла опущена высота СД = h. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники АДС, ВСД и АВС, равны соответственно r_1, r_2 и r. Доказать, что $r_1+r_2+r=h$.

42. Доказать, что если высота и медиана, проведенные из одной вершины неравнобедренного треугольника лежат внутри треугольника и образуют с его сторонами равные углы, то этот треугольник прямоугольный.

Ответы и указания к решениям

26. $2\sqrt{13}$ (см). Дважды применить теорему Пифагора.

27. $12\sqrt{13}$ см, $18\sqrt{13}$ см. Найти h^2 из первого соотношения задачи 23 и применить теорему Пифагора к двум треугольникам на рис. 5.

28. 18 см, $12\sqrt{2}$ см. Из прямоугольного треугольника, куда входят данный катет и его проекция, найдем $h^2 = 6^2 - 2^2 = 32$. Из соотношения $h^2 = a'b'$ (задача 23) найдем проекцию второго катета, она равна 16. Тогда гипотенуза равна 2 + 16 = 18 (см). Из теоремы Пифагора находим второй катет.

29. $\frac{15}{4}$. Пусть (рис.5) АС = 5, $ДВ = \frac{9}{4}$, АД = x, СД = y. Запишем теорему Пифагора для ΔАДС: $x^2+y^2=25$ и первое соотношение из задачи 23: $y^2 = \frac{9}{4}x$. Подставляя значение y^2 из первого выражения во второе, получим квадратное уравнение относительно x.

30. 5. Пусть x, $x+1$, $x+2$ – стороны прямоугольного треугольника. По теореме Пифагора $(x+2)^2 = x^2+(x+1)^2$. Это квадратное уравнение имеет единственный положительный корень $x = 3$, поэтому гипотенуза равна 5.

31. $3\sqrt{2}$. Воспользовавшись соотношениями $c^2 = a^2+b^2$ и $r = p–c$, находим $r = 3$. Искомое расстояние ОС (рис. 6) равно $r\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

32. $\sqrt{3}$. Пусть $b>a$, тогда по условию $r = \frac{b-a}{2}$, но по задаче 25

$r = \frac{a+b-c}{2}$, тогда $c = 2a$. Применим теорему Пифагора: $a^2+b^2 = 4a^2$, откуда и находим $b:a$.

33. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ *см.* Центр окружности, проходящей через три заданные точки, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам, соединяющим эти точки. См. рис. 7. Искомый радиус ОС находим по теореме Пифагора: $OC^2 = 1 + (\frac{3}{2})^2$.

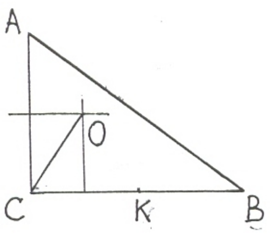

Рис. 7.

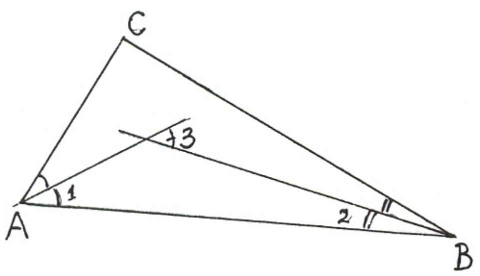

Рис. 8.

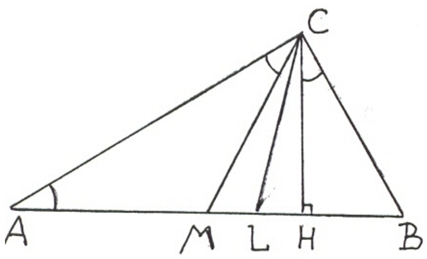

Рис. 9.

34. 45°. При решении этой задачи используется только определение биссектрисы и свойство суммы острых углов прямоугольного треугольника.

$2\angle 1+2\angle 2 = 90°$ (рис. 8), следовательно, $\angle 1+\angle 2 = 45°$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle 3 = \angle 1+\angle 2 = 45°$.

35. Пусть CH, CL и CM – соответственно высота, биссектриса и медиана прямоугольного ΔABC (рис. 9). Надо доказать, что ∠HCL = ∠LCM. Так как CL – биссектриса ∠ACB, то достаточно доказать равенство углов BCH и ACM. По задаче 2 $CM = MA = \frac{c}{2}$, ΔCMA равнобедренный и ∠ACM = ∠A. Но тогда ∠BCH = 90° – ∠B = 90°–(90° – ∠A) = ∠A, так как ∠B + ∠A = 90°. Таким образом, ∠BCH = ∠ACM = ∠A.

36. 15, 20, 25 см. Из условия задачи $a + b = 60 - c$, $c^2 = a^2+b^2$, из последнего соотношения задачи $23–12c = ab$. Тогда $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = c^2 + 24c$. С другой стороны, $(a+b)^2 = (60–c)^2$. Приравниваем $c^2 + 24c = 3600 - 120c + c^2$, или $144c = 3600$, откуда $c = 25$ (см). Тогда $a+b = 60–25=35$, $a^2+b^2 = c^2 = 625$, $ab= 12c = 12\cdot 25 = 300$. Поэтому $(a–b)^2 = a^2+b^2–2ab = 625–600 = 25$, $a–b = 5$, если $a>b$. Решаем систему уравнений: $\begin{cases} a+b=35 \\ a-b=5 \end{cases}$

Складывая эти уравнения, получаем $2a = 40$, $a = 20$; тогда $b = 15$.

37. $\frac{5}{4}$. По условию CH: CM = 40:41 (рис. 9). Пусть CH = 40k, CM = 41k, где k – некоторый коэффициент. Тогда BM = AM = CM = 41k (зад. 2). Из прямоугольного треугольника CHM находим $HM = \sqrt{CM^2 - CH^2} = 9k$, следовательно, BH = BM – HM = 32k. Треугольники BHC и BCA подобны, поэтому $\frac{BH}{BC} = \frac{CH}{CA}$, *откуда* $\frac{CA}{BC} = \frac{CH}{BH} = \frac{40k}{32k} = \frac{5}{4}$.

38. Из задач 24 и 25 имеем $2R = c$, $2r = a+b–c$, поэтому $2R+2r = a+b$, где a, b – катеты.

39. $\sin A = \frac{3}{5}, \sin B = \frac{4}{5}$. По задаче 38 $a+b = 2(R+r)$, но по условию задачи $\frac{R}{r} = \frac{5}{2}$, *поэтому* $a + b = 2(R + \frac{2}{5}R) = 2 \cdot \frac{7}{5}R$, но $2R = c$, поэтому $a + b = \frac{7}{5}c$. Так как $a^2+b^2 = c^2$, то $a = \frac{3}{5}c, b = \frac{4}{5}c$ (*или* $a = \frac{4}{5}c, b = \frac{3}{5}c$).

40. $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^3}$.

Рис. 10.

1. Обозначим ∠A = α, тогда ∠B = 90°–α, $\frac{1}{2}\angle B = 45° - \frac{\alpha}{2}$ (рис. 10).

∠HCB = 90°–∠B = ∠A = α, $\frac{1}{2}\angle HCB = \frac{\alpha}{2}$. На рис. 10 углы $\frac{\alpha}{2}$ отмечены одной дугой.

$\Delta AK_1O_1 \sim \Delta CL_2O_2$ (прямоугольные с острым углом $\frac{\alpha}{2}$), поэтому

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{AK_1}{CL_2}$ (1).

2. ∠ACH = 90°–∠A = 90° – α (из прямоугольного ΔACH), $\frac{1}{2}\angle ACH = 45° - \frac{\alpha}{2}$. На рис. 10 углы $45° - \frac{\alpha}{2}$ отмечены двумя дугами.

$\Delta CL_1O_1 \sim \Delta BK_2O_2$ (Прямоугольные с острым углом $45° - \frac{\alpha}{2}$), поэтому $\frac{r_1}{r_2} = \frac{CL_1}{BK_2}$ (2).

3. Обозначим CB = *a*, CA = *b*, AH = *b*‘, BH = *a*‘, CH = *h*. Тогда AK_1 = AH–r_1 = *b*‘– r_1, BK_2 = BH – r_2 = *a*‘ – r_2, CL_1 = *h* – r_1, CL_2 = *h* – r_2.

(1) => $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b' - r_1}{h - r_2}$, откуда $r_1 h = b' r_2$, или $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b'}{h}$ (3).

(2) => $\frac{r_1}{r_2} = \frac{h - r_1}{a' - r_2}$, откуда $a' r_1 = h r_2$, или $\frac{r_1}{r_2} = \frac{h}{a'}$ (4).

4. Из (3) следует, что $b' = kr_1$, $h = kr_2$. Так как $h^2 = a'b'$ (задача 23), то

$a' = k\frac{r_2^2}{r_1}$.

5. $a^2 = a'^2 + h^2, b^2 = b'^2 + h^2$. Подставим в эти соотношения *a*‘, *b*‘, *h* из 4 пункта: $a^2 = k^2 \frac{r_2^2(r_1^2 + r_2^2)}{r_1^2}, b^2 = k^2(r_1^2 + r_2^2)$.

Отсюда $\frac{a}{b} = \frac{r_2\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} = \frac{r_2}{r_1}$. $\frac{a}{b} = tg\alpha, поэтому\, tg\alpha = \frac{r_2}{r_1}$.

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}} = \frac{r_1^2}{r_1^2 + r_2^2}, откуда\ \cos\alpha = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$, так как α – острый угол.

6. $c = \frac{b}{\cos\alpha}$ из прямоугольного ΔABC, поэтому $c = \frac{k(r_1^2 + r_2^2)}{r_1}$ с учетом значений *b* и cosα из п.5.

7. Из задачи 25 для ΔACH

$$r_1 = \frac{b' + h - b}{2} = \frac{k}{2}(r_1 + r_2 - \sqrt{r_1^2 + r_2^2}),\textit{откуда}\ k = \frac{2r_1}{r_1 + r_2 - \sqrt{r_1^2 + r_2^2}}.$$

8. $r = \dfrac{a + b - c}{2}$, где выражения для *a*, *b* берем из п. 5, выражение для *c* – из п. 6, а значение *k* – из п. 7. После преобразований получаем $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

41. Из решения задачи 40 имеем

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}, h = kr_2 = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2 - \sqrt{r_1^2 + r_2^2}} = \frac{2r_1r_2(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1^2 + r_2^2})}{(r_1 + r_2)^2 - (r_1^2 + r_2^2)} =$$

$$= \frac{2r_1r_2(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1^2 + r_2^2})}{2r_1r_2} = r_1 + r_2 + \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = r_1 + r_2 + r.$$

42. Обозначим (рис. 9) CH = *h*, ∠BCH = ∠ACM = α. Тогда в прямоугольном треугольнике CHB ∠B = 90°– α, в прямоугольном треугольнике ACB ∠A = 90°–∠B = 90°–(90°–α) = α. Так как углы при основании CA треугольника AMC равны α, то этот треугольник равнобедренный, CM = MA. Но MA = MB, поэтому треугольник BMC тоже равнобедренный (BM = MC), углы B и BCM равны 90°–α. Поэтому ∠C = ∠BCA = ∠BCM +∠ACM = 90°–α+α = 90°, что и требовалось доказать.

§ 3. Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Опорные задачи

!43. Даны две стороны треугольника *a, b* и угол γ между ними. Найти третью сторону.

Решение: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

!44. Даны три стороны треугольника *a*, *b*, *c*. Найти углы этого треугольника.

Решение. $cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

!45. Даны две стороны *a*, *b* и угол α (не между ними). Найти третью сторону *c*.

Решение. По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ получаем относительно неизвестной стороны *c* квадратное уравнение.

!46. Определить вид треугольника (остроугольный, тупоугольный, прямоугольный), если известны три его стороны: а) 6, 7, 9; б) 7, 24, 25; в) 25, 12, 15.

Решение. Надо определить, какой наибольший угол в треугольнике – острый, тупой или прямой – по знаку косинуса этого угла. Находим квадрат большей стороны, так как больший угол в треугольнике лежит против большей стороны.

а) $9^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos\alpha$. Знак $\cos\alpha$ совпадает со знаком числового выражения $6^2 + 7^2 - 9^2 = 36 + 49 - 81 > 0$, поэтому $\cos\alpha > 0$, α – острый угол, треугольник остроугольный;

б) $25^2 = 7^2 + 24^2 - 2 \cdot 7 \cdot 24 \cdot \cos\alpha$. Число $7^2 + 24^2 - 25^2 = 0$, поэтому $\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90°$, треугольник прямоугольный;

в) число $12^2 + 15^2 - 25^2 < 0$, поэтому треугольник тупоугольный.

Задачи для решения

47. Средняя линия ΔАВС, параллельная АС, равна 3 см, АВ = 7 см, ∠С= 60°. Найти ВС.

48. В ΔАВС ∠А = 60°, АВ = 1, ВС = a. Найти АС.

49. В ΔАВС даны три стороны: АС = 2, АВ = 3, ВС = 4. ВД – высота ΔАВС. Найти СД.

50. В правильном треугольнике АВС со стороной 3 на стороне АС взята точка М так, что МС = 2АМ. Найти ∠АВМ.

51. В треугольнике со сторонами 3, 4, 5 проведена медиана к большей стороне. Определить косинус угла, образованного медианой с меньшей стороной треугольника.

52. На стороне АВ и ВС ΔАВС вне него построены квадраты АВДЕ и СВНК. Докажите, что ДН в 2 раза больше медианы ВР треугольника АВС.

Замечания. Теорема косинусов часто применяется при решении задач из других тематических разделов.

Ответы и указания к решениям задач

47. $3+\sqrt{22}$. Решение сводится к опорной задаче 45.

48. По формулировке это опорная задача 45, но условие задачи 48 содержит периметр a. Решение задачи сводится к решению квадратного уравнения $x^2 - x + 1 - a^2 = 0$ (*) с параметром a. Дискриминант этого уравнения равен Д = $4a^2 - 3$. При $a \rangle \frac{\sqrt{3}}{2}$ дискриминант Д > 0 и уравнение имеет два корня:

$x_1 = \frac{1+\sqrt{Д}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{Д}}{2}$. Корень $x_1 > 0$, корень x_2 может быть и отрицательным. Найдем те значения a, при которых $x_2 > 0$, т.е. решим неравенство $1-\sqrt{4a^2-3}\rangle 0$. Решением неравенства будут значения $a\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1)$. Если Д=0, т.е. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то уравнение (*) имеет единственный корень $x=\frac{1}{2}$. Если Д<0, то решений нет.

Ответ: $AC=\frac{1\pm\sqrt{4a^2-3}}{2}$, *если* $a\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1)$; $AC=\frac{1}{2}$ *при* $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

AC=1 при *a* = 1.

49. $2\frac{3}{4}$. Сначала находим ∠C (задача 44), потом СД = BC·cosC как катет прямоугольного треугольника СДВ.

50. $\frac{5\sqrt{7}}{14}$. Сначала решаем задачу 43 для ΔABM и находим BM, а потом решаем задачу 44.

51. $\frac{9}{15}$. Так как данный треугольник прямоугольный, то по задаче 2 медиана равна $\frac{5}{2}$. Далее применяем задачу 43.

Рис. 11.

52. $BP^2=\frac{1}{4}\cdot 2(AB^2+BC^2)-AC^2$ по задаче 4. По теореме косинусов для ΔДВН имеем $ДН^2=ДВ^2+ВН^2-2ДВ\cdot ВН\cdot\cos\angle ДВН$. Так как ДВ=АВ, ВН=ВС (построенные четырехугольники – квадраты) и

∠ДВН=360°–180°–∠АВС=180°–∠В, то $ДН^2=AB^2+BC^2+2AB\cdot BC\cdot\cos B$.

По теореме косинусов для ΔABC

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$, откуда находим

$2AB\cdot BC\cdot\cos B=AB^2+BC^2-AC^2$.

Тогда $ДН^2=2(AB^2+CB^2)-AC^2$. Сравнивая полученное выражение с выражением для BP^2, получаем, что ДН=$\frac{1}{2}BP$.

§ 4. Высоты треугольника. Ортоцентр

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону.

!53. Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Точка пересечения высот треугольника называется ортоцентром. Ортоцентр тупоугольного треугольника находится вне треугольника.

При решении задач на высоты треугольника часто используется прием вычисления площади треугольника двумя способами. Покажем этот прием на примере решения следующей задачи.

!54. AA_1 и BB_1 – высоты ΔABC. Найти AC, если $AA_1=4$, $BB_1=5$, $BC=6$.

Решение. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot BC = 12, S_{ABC} = \frac{1}{2} BB_1 \cdot AC. AC = \frac{24}{5} = 4{,}8.$

Задачи для решения

55. Стороны треугольника равны 4, 5, 6. Найти высоту, проведенную к стороне, равной 6.

56. AA_1 и BB_1 – высоты треугольника ABC. $A_1C=8$, $B_1C=5$, $BB_1=12$.
Найти AC.

57. В треугольнике ABC AB=7, AC=8, $\angle A=120°$. Найти расстояние от основания высоты, опущенной на сторону AC, до середины BC.

58. В треугольнике ABC $AB=c$, $AC=b$, $\angle A=\alpha$. Найти длины высот BB_1 и AA_1.

59. Высота треугольника равна 6 и делит угол в отношении 2:1, а основание на отрезки, меньший из которых равен 3. Найти стороны треугольника.

60. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, боковая сторона равна 18 см. К боковым сторонам проведены высоты. Вычислить длину отрезка, концами которого являются основания высот.

61. Найти углы равнобедренного треугольника, если известно, что ортоцентр делит пополам высоту, проведенную к основанию треугольника.

62. Зная углы треугольника, определить угол между высотой и медианой, проведенными из одной вершины.

63. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) на стороне BC взята точка Д так, что ВД:ДС=1:4. В каком отношении прямая АД делит высоту BE треугольника ABC, считая от точки B?

Ответы и указания к решениям задач

55. $\frac{5\sqrt{7}}{4}$. Решение, связанное с теоремой Пифагора, более трудоемкое, так как требует введения двух неизвестных и решения системы двух уравнений. Проще по теореме косинусов найти один из углов, прилежащих к сторо-

не длины 6 (зад. 44) и найти высоту как катет прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза известна, а другой катет находится как произведение гипотенузы на косинус прилежащего угла. Можно сразу найти высоту как произведение гипотенузы на синус противоположного угла α, используя соотношение $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, где $\cos\alpha$ найден по теореме косинусов.

56. $\frac{104}{5}$. Сторону BC находим из прямоугольного треугольника BB_1C: BC=13. Из этого же треугольника $\cos C = \frac{B_1C}{BC} = \frac{5}{13}$. В прямоугольном треугольнике AA_1C (рис. 12) $\cos C = \frac{A_1C}{AC}$, откуда и находим AC, используя, что $\cos C = \frac{5}{13}$, $A_1C=8$.

57. $\frac{13}{2}$. Пусть B_1 – основание высоты, опущенной на сторону AC, тогда искомое расстояние равно длине медианы прямоугольного треугольника BB_1C (задача 2). Сторону BC находим из ΔABC (задача 43).

58. $BB_1 = c\sin\alpha$, $AA_1 = \frac{bc\sin\alpha}{\sqrt{b^2+c^2+2bc\cdot cosA}}$.

Из ΔABC находим BC (задача 43), далее решение аналогично решению задачи 55 (через площадь треугольника).

59. $3\sqrt{5}$, 10 и 11.

См. рис. 14. AB – гипотенуза $\Delta АДВ$, $AB = 3\sqrt{5}$;

$$\cos\alpha = \frac{АД}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{ВД}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Из $\Delta АДС$

$$\cos 2\alpha = \frac{АД}{AC}; АД = 6, \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5},$$

$$\textit{поэтому}\ AC = \frac{30}{3} = 10; ДС = AC \cdot Sin2\alpha = 8, BC = 11$$

Рис. 12. *Рис. 13.* *Рис. 14.*

60. $9\frac{1}{3}$ *см.*

Сделаем чертеж к задаче (рис. 14). Искомый отрезок ДЕ можно найти, используя подобие треугольников ДВЕ и АВС. Для этого нужно знать один из отрезков ДВ и АД. Отрезок АД можно найти из условия задачи. Из прямоугольного ΔAFB находим $\cos\angle BAC=\frac{AF}{AB}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}.$ Из прямоугольного ΔАДС находим АД=АС·cos∠ВАС=$12\cdot\frac{1}{3}=4.$ Тогда ВД=ВА–АД=18–4=14.

61. $\arccos\frac{1}{3}, \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}, \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Сделаем чертеж к задаче (рис. 15) и введем обозначения: АД=ДС=*a*, ВН=НД=*b*, ∠АВД=∠ДВС=β. Тогда ∠ВАС=∠ВАД=90°–β из прямоугольного ΔАВД. ∠ВНЕ=90°–β из ΔВЕН, ВЕ=*b*cosβ. С другой стороны, ВЕ=АВ–АЕ, где $AB=\sqrt{АД^2+ВД^2}=\sqrt{a_2+4b^2}$, АЕ=АС·cos∠ВАС=АСsinβ=2*a*sinβ.

Из ΔАВД $\sin\beta=\frac{АД}{AB}=\frac{a}{\sqrt{a^2+4b^2}}, \cos\beta=\frac{2b}{\sqrt{a^2+4b^2}}.$ Поэтому

$$BE=\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+4b^2}} \text{ и } BE=\sqrt{a^2+4b^2}-\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+4b^2}}=\frac{4b^2-a^2}{\sqrt{a^2+4b^2}}.$$

Откуда $2b^2=4b^2-a^2$, т.е. $a^2=2b^2$, $a=\sqrt{2}b$.

Тогда $$\cos\beta=\frac{2b}{\sqrt{2b^2+4b^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}, \sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}; \cos\angle B=\cos 2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\beta=$$
$$=\frac{4}{6}-\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}; \cos\angle BAC=\cos\angle A=\cos(90^\circ-\beta)=\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Рис. 15 *Рис. 16.* *Рис. 17.*

62. $tg\gamma=\frac{1}{2}(ctgA-ctgB).$

Пусть для определенности высота и медиана проведены из вершины С (рис. 16), тогда $tg\gamma=\frac{1}{2}(ctgA-ctgB),$ где А и В – углы ΔАВС. Для получения этой формулы нужно выразить отрезки АН, НВ и НМ из прямоугольных треугольников: АН=СН·ctgA, НВ=СН·ctgB, НМ=СН·tgγ и найти

НВ–НА=(НМ+МВ)–(АМ–НМ)=2НМ, так как АМ=МВ (СМ – медиана ΔАВС).

63. 1:2.

Сделаем дополнительное построение: проведем среднюю линию EF треугольника АДС (рис. 17), тогда отрезки ДF и FC составляют по две части, ВД – 1 часть стороны ВС. ΔВОД ~ ΔВЕF, $\frac{BO}{BE}=\frac{BД}{BF}=\frac{1}{3}$, следовательно, точка О делит отрезок ВЕ в отношении 1:2, считая от вершины В.

§ 5. Теорема синусов. Описанная окружность

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$ где R – радиус описанной около ΔАВС окружности.

В виду того, что в школе теоремой синусов называют первые два равенства (без равенства «=2R»), а для решения задач часто оказывается полезным применение именно последнего равенства, проведем доказательство этого равенства. Пусть около треугольника АВС описана окружность с центром О радиуса R (рис. 18). Проведем диаметр СД и соединим точки Д и В. Треугольник СВД прямоугольный, так как вписанный угол СВД опирается на диаметр окружности. Поэтому sin∠ВДС=$\frac{BC}{ДC}=\frac{a}{2R}$. Так как вписанные углы ВДС и ВАС опираются на одну и ту же дугу ВС окружности, то эти углы равны, поэтому sin∠ВАС=sinα=$\frac{a}{2R}$. Что и требовалось доказать.

Рис. 18.

Очень часто с помощью теоремы синусов находят радиус описанной около треугольника окружности (см., например, задачи 65 и 66).

Опорные задачи

!64. Даны две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них. Найти остальные углы и третью сторону треугольника.

Решение. Пусть даны *a*, *b*, α, тогда

$$\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a},\beta=\arcsin\frac{b\sin\alpha}{a},\gamma=180°-\alpha-\beta;c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

!65. Даны сторона *a* и противолежащий ей угол α треугольника. Найти радиус описанной около этого треугольника окружности.

Решение. $R=\frac{a}{2\sin\alpha}.$

!66. Даны три стороны *a*, *b*, *c* треугольника. Найти радиус описанной около треугольника окружности.

Решение. 1) находим cosα по теореме косинусов (задача 44);

2) находим $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$;

3) по теореме синусов $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ (задача 65).

Напомним, что около любого треугольника можно описать единственную окружность, ее центр находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Задачи для решения

67. Одна сторона треугольника равна 2, прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найти остальные стороны.

68. В окружности радиуса $\sqrt{2}$ проведена хорда АВ, равная 2. Пусть М – некоторая точка окружности. Найти ∠АМВ.

69. На основании ВС равнобедренного ΔАВС взята произвольно точка Д. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников АВД и АСД, равны.

70. Из середины стороны правильного треугольника под углом α к этой стороне проведена прямая. В каком отношении эта прямая делит другую сторону треугольника?

71. Стороны треугольника равны 7, 8 и 13 см. Найти радиус окружности, проходящей через концы большей стороны и середину меньшей стороны.

72. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4 см. Найти радиус окружности, проходящей через вершины острых углов и середину большего катета.

Ответы и указания к решениям задач

67. $\sqrt{2(\sqrt{3}-1)}, 2(\sqrt{3}-1)$.

68. 45° или 135°. $\dfrac{AB}{\sin\angle AMB} = 2R$ по теореме синусов.

69. Пусть R_1 и R_2 – радиусы окружностей, описанных около треугольников АВД и АСД соответственно (рис. 19). $2R_1 = \dfrac{AB}{\sin\angle AДB}, 2R_2 = \dfrac{AC}{\sin\angle AДC}$. АВ=АС по условию задачи, синусы смежных углов АДВ и АДС равны, поэтому $R_1=R_2$.

Рис. 19. *Рис. 20.*

70. $\sqrt{3}ctg\alpha$.

Обозначим сторону ΔАВС через *а*. Найдем КС из ΔДКС (рис. 20):

$$\frac{KC}{\sin\alpha}=\frac{ДC}{\sin\angle ДKC}, где\ ДC=\frac{a}{2},\ \angle ДKC=180°-\angle KДC-\angle KCД=$$

$$=180°-\alpha-60°=180°-(\alpha+60°),$$

поэтому sin∠ДКС=sin(α+60°).

Отсюда $KC=\dfrac{a\sin\alpha}{2\sin(\alpha+60°)}$ и

$$\frac{BC}{KC}=\frac{2\sin(\alpha+60°)}{\sin\alpha}=\frac{2(\sin\alpha\cdot\cos 60°+\cos\alpha\cdot\sin 60°)}{\sin\alpha}=1+\sqrt{3}ctg\alpha.$$

С другой стороны, $\dfrac{BC}{KC}=\dfrac{BK+KC}{KC}=\dfrac{BK}{KC}+1,$ *поэтому* $\dfrac{BK}{KC}=\sqrt{3}\cdot ctg\alpha.$.

71. $\dfrac{13\sqrt{139}}{16}$.

Пусть АВ=7 см, ВС=8 см, АС=13 см, К – середина АВ (рис. 21). Радиус окружности, описанной около ΔАКС, равен $R=\dfrac{KC}{2\sin A}$. Найдем КС медиану ΔАВС (задача 4), cosA из ΔАВС (задача 44), $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

72. $\dfrac{\sqrt{13}\cdot 5}{6}$.

Гипотенуза данного треугольника равна 5. На рис. 22 выделены отрезок *а* и угол α, которые нужно найти, чтобы решить задачу. Отрезок *а* находим как медиану треугольника с известными сторонами (задача 4), sinα находим из данного треугольника: $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ как отношение противолежащего катета к гипотенузе. $2R=\dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Рис. 21.

§ 6. Биссектрисы треугольника. Вписанная окружность

Биссектрисой угла называется луч, делящий угол пополам. Биссектриса угла является его осью симметрии. Все точки биссектрисы равноудалены от сторон угла.

Биссектрисами треугольника называются отрезки, лежащие на биссектрисах его углов. На рис. 23 отрезки AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы треугольника ABC.

Опорные задачи

!73. Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Точка пересечения биссектрис треугольника является центром вписанной в треугольник окружности.

!74. Биссектриса треугольника делит сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника: $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{CB}, \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB}{AC}, \frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB}{BC}$ (рис. 23).

Рис. 23

Доказательство. По теореме синусов для ΔABA_1 имеем: $\frac{BA_1}{\sin\angle\frac{A}{2}}=\frac{AB}{\sin\angle BA_1A}$, аналогично для ΔAA_1C – $\frac{A_1C}{\sin\angle\frac{A}{2}}=\frac{AC}{\sin\angle AA_1C}$.

Разделим первое из этих равенств на второе и учтем, что синусы смежных углов равны. Получим второе из соотношений задачи. Остальные доказываются аналогично.

Полезно также повторить решение опорной задачи 25.

Задачи для решения

75. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1 угла B. $AB=BB_1=B_1C$. Найти углы ΔABC.

76. Найти углы треугольника, если известно, что две стороны этого треугольника видны из центра вписанной окружности под углами 102° и 126°.

77. В треугольнике ABC угол B равен 60°, радиус описанной окружности равен 2. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и C и центр O окружности, описанной около ΔABC.

78. В треугольнике АВС известны ∠А=60°, ВС=4 см, АД – биссектриса угла А, ВД = 1 см. Найти стороны АВ и АС.

79. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки 7 и 24 см. Найти радиус вписанной окружности в этот треугольник.

80. Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника и одинаково удаленная от его катетов, делит гипотенузу на отрезки 30 см и 40 см. Найти катеты.

81. В прямоугольном треугольнике АВС из вершины С прямого угла проведены биссектриса СК и медиана СМ. Найти катеты, если СМ=m, КМ=n.

82. В прямоугольном треугольнике найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины острого угла, равного α.

83. Основание равнобедренного треугольника 12 см, боковая сторона 18 см. К боковым сторонам проведены биссектрисы. Вычислить длину отрезка, концами которого служат основания биссектрисы.

84. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 18 и 24 см.

85. Найти биссектрису прямого угла прямоугольного треугольника с катетами a и b.

86. Основание равнобедренного треугольника равно 6 см, угол при вершине равен 30°. Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

87. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине равен 2α. Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

88. В треугольнике АВС проведена биссектриса АД. Найти ВС, если известно, что АС=b, АВ=c и АД=ВД.

89. В треугольнике АВС известно, что ВС=12 см, АС=8 см и угол А вдвое больше угла В. Найти АВ.

90. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.

Ответы и указания к решениям задач

75. 72°, 36°, 72°.

На рис. 24 отмечены равные стороны и углы при основаниях равнобедренных треугольников. По теореме о внешнем угле треугольника ∠5=∠1+∠2. Используем теорему о сумме углов треугольника и находим все углы.

Рис. 24.

76. 72°, 84°, 24°.

На чертеже (рис. 25) отмечены равные углы. Используется только теорема о сумме углов треугольника.

Рис. 25. *Рис. 26.* *Рис. 27.*

77. 2. Находим АС из теоремы синусов для ΔАВС $(\frac{AC}{\sin B} = 2R, R = 2)$ и применяем теорему синусов для ΔАОС.

78. $\frac{4\sqrt{7}}{7}, \frac{12\sqrt{7}}{7}$.

Найдем ДС=ВС–ВД=3 (см). АВ:АС=1:3 (опорная задача 74), поэтому АВ=x (см), АС=$3x$ (см). Неизвестные x находим с помощью теоремы косинусов для ΔАВС.

79. $\frac{93}{25}$. Удобно воспользоваться опорной задачей 25, для чего необходимо найти катеты прямоугольного треугольника, воспользовавшись опорной задачей 74 и теоремой Пифагора.

80. 56 см и 42 см.

Эта задача аналогична задаче 79, потому что точка, равноудаленная от катетов (сторон прямого угла), принадлежит биссектрисе этого угла.

81. $\frac{m(m-n)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}, \frac{m(m+n)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

Гипотенуза $c=2m$ (опорная задача 2). Отношение катетов равно

$(m-n):(m+n)$ (опорная задача 74). Применяя теорему Пифагора, находим сами катеты.

82. $arctg(-\frac{1}{2}tg\alpha) - \frac{\alpha}{2}$.

Пусть СК – биссектриса острого угла С=α, СМ – медиана прямоугольного треугольника АВС (рис. 26). Тогда $\angle ACK = \angle KCB = \frac{\alpha}{2}$, ∠КСМ=$x$ – искомый угол. По задаче 62 $tg\angle ACM = \frac{1}{2}(ctgA - ctgB)$. Здесь ∠А=90°, ∠В=90°–α, $\angle ACM = \frac{\alpha}{2} + x$. Поэтому $tg(\frac{\alpha}{2} + x) = \frac{1}{2}(-ctg(90° - \alpha)) = -\frac{1}{2}tg\alpha$.

Отсюда, $\frac{\alpha}{2} + x = arctg(-\frac{1}{2}tg\alpha), x = arctg(-\frac{1}{2}tg\alpha) - \frac{\alpha}{2}$.

83. 7,2 см.

Пусть AN и CK – биссектрисы (рис. 27). Так как ВД – ось симметрии ΔABC, то отрезок KN параллелен основанию AC, ΔKBN ~ ΔABC.

$\frac{KB}{KA}=\frac{BC}{AC}$ (опорная задача 74), $\frac{BC}{AC}=\frac{3}{2}$, *поэтому* $\frac{KB}{KA}=\frac{3}{2}$. Учитывая, что KB+KA=AB=18 (см), находим, что $KB=\frac{54}{5}$ *см*, $KA=\frac{36}{5}$ *см.* KN находится из подобия треугольников.

84. $9\sqrt{5}$ *см*, $8\sqrt{10}$ *см.*

Пусть CK – биссектриса (рис. 26), AC=18 см, AB=24 см. Сначала найдем AK (опорная задача 74), а потом из прямоугольного треугольника CAK найдем CMK. Для второй биссектрисы проведем аналогичные вычисления.

85. $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Одно из возможных решений этой задачи состоит в применении теоремы синусов, для чего нужно сначала вычислить один из отрезков, на которые биссектриса делит гипотенузу, используя задачу 74. $AB=\sqrt{a^2+b^2}$.

АД=$\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$. $\sin\alpha=\frac{CB}{AB}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. По теореме синусов для ΔАДС

$\frac{СД}{\sin\alpha}=\frac{АД}{\sin 45^\circ}$, откуда находим СД. (рис. 28)

Рис. 28. *Рис. 29.* *Рис. 30.*

86. $\frac{3}{2(1+2\sin 15^\circ)\sin 15^\circ\cdot\sin 37{,}5^\circ}$.

Будем пользоваться рис. 27, на котором АД=АД=3 см, ∠ABC=30°, тогда ∠BAC=∠BCA=75°, $\angle BAN=\frac{75^\circ}{2}=37{,}5^\circ$. Найдем BN (опорная задача 74) и воспользуемся теоремой синусов для ΔABN. $\frac{BN}{CN}=\frac{AB}{AC}$, *где* $AB=\frac{АД}{\sin 15^\circ}=\frac{3}{\sin 15^\circ}$ из прямоугольного ΔАВД.

Тогда $\dfrac{BN}{CN}=\dfrac{1}{2\sin 15°}$, откуда BN=$x$, CN=2$x$sin15°. Но BN+CN=BC, поэтому $x(1+2\sin 15°)=\dfrac{3}{\sin 15°}, т.е.\ x=\dfrac{3}{(1+2\sin 15°)\sin 15°}$.

По теореме синусов $\dfrac{BN}{\sin 37{,}5°}=\dfrac{AN}{\sin 30°}$, откуда и находим AN.

87. $\dfrac{a\cos\alpha}{\sin(45°+\frac{3\alpha}{2})}$. Решение повторяет решение задачи 86.

88. $\sqrt{b(b+c)}$. Сделаем чертеж к задаче (рис. 29), обозначим равные углы через α. ВД=cx, ДС=bx (задача 74). Из равнобедренного ΔВДА $ВД=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{BA}{\cos\alpha}=\dfrac{c}{2\cos\alpha}, поэтому\ x=\dfrac{1}{2\cos\alpha}$. Параметр α вспомогательный и от него нужно избавиться. По теореме синусов для ΔАВС имеем

$\dfrac{(b+c)x}{\sin 2\alpha}=\dfrac{b}{\sin\alpha}$. Заменив в этом соотношении sin2α=2sinαcosα и

$2\cos\alpha=\dfrac{1}{x}$, получаем $(b+c)x^2=b$, откуда находим $x=\sqrt{\dfrac{b}{b+c}}$ и получаем ответ.

89. 10 см. Условие «угол вдвое больше угла В» означает, что, если мы проведем биссектрису угла А, то получившиеся при этом углы будут равны углу В. Поэтому возвращаемся снова к задаче 88 и рис. 29, где известны ВС=12 см и АС=b=8 см. Так как по задаче 90 $BC=\sqrt{b(b+c)}$, то это дает возможность найти c=АВ.

90. Пусть СН – высота, СК – биссектриса, СМ – медиана прямоугольного треугольника АСВ (рис. 30). Из прямоугольных треугольников АСВ и АНС ∠В=90°–∠А и ∠АСН=90°–∠А, эти углы на рис. 30 обозначены α. Так как СМ=МВ (опорная задача 2), то ∠МСВ=α. Так как СК – биссектриса, ∠АСК=∠КСВ=45°, из этих равных углов вычтем равные углы ∠АСН=∠ВСН=α, останутся также равные углы. Что и требовалось доказать.

§ 7. Площадь треугольника

Для успешного решения задач по этой теме необходимо знать основные формулы для вычисления площади треугольника:

1) $S=\dfrac{1}{2}a\cdot h_a$ (a – сторона, h_a – высота, проведенная к этой стороне);

2) $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ (a, b – стороны, C – угол между ними);

3) S=pr (p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности);

4) $S = \frac{abc}{4R}$ (a, b, c – стороны, R – радиус описанной окружности);

5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона).

Полезно также использовать прием вычисления площади треугольника двумя способами (см. решение задачи 54). Если мы можем найти площадь треугольника по одной из формул, то используя найденное значение площади и другую формулу для вычисления площади, можем найти неизвестную высоту, сторону, угол. Например, если даны три стороны треугольника и нужно вычислить одну из его высот, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона, а затем воспользоваться формулой 1 для нахождения неизвестной высоты.

Опорные задачи

!91. Площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон.

!92. Площади треугольников, имеющих равные основания, относятся как высоты этих треугольников.

!93. Площади треугольников, имеющих по одному равному углу, относятся как произведения сторон, содержащих эти углы.

Решения задач 92 и 93 вытекают соответственно из формул 1 и 2 для вычисления площади треугольников.

Задачи для решения

94. Доказать, что $R = \frac{авс}{4S}$.

95. Выразить площадь правильного треугольника через его сторону.

96. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан. Доказать, что $S_{AOB} = S_{BOC} = S_{AOC}$.

97. Если O – внутренняя точка ΔABC и $S_{AOB}=S_{BOC}=S_{AOC}$, то O – точка пересечения медиан ΔABC.

98. Доказать, что медианы произвольного треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

99. Площадь треугольника равна 5, две его стороны равны 3 и 4. Найти площади треугольников, на которые этот треугольник делится биссектрисой угла между этими сторонами.

100. Стороны треугольника равны 25, 24 и 7 см. Найти радиусы вписанного и описанного кругов.

101. Две стороны треугольника равны 3 и 4, его площадь равна $3\sqrt{3}$. Найти третью сторону треугольника.

102. Даны две стороны *b* и *c* треугольника и его площадь $S = \frac{2}{5}bc.$ Найти третью сторону треугольника.

103. Определить площадь треугольника, если две стороны равны 27 см и 29 см, а медиана к третьей стороне равна 26 см.

104. В окружность радиуса R вписан треугольник с углами 15° и 60°. Найти площадь треугольника.

105. Площадь прямоугольного треугольника равна $2\sqrt{3}$ см^2. Определить его высоту, проведенную к гипотенузе, если она делит прямой угол в отношении 1:2.

106. Найти площадь равнобедренного треугольника с углом 120°, если радиус вписанной окружности равен $\sqrt[4]{12}$ см.

107. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 3. Найти площадь этого треугольника.

108. Дан прямоугольный треугольник. В него вписана окружность. Точка касания окружности и гипотенузы делит гипотенузу на отрезки *m* и *n*. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника равна *mn*.

109. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна ℓ, а высота, опущенная из вершины прямого угла, равна *h*. Найти площадь этого треугольника.

110. Определить углы равнобедренного треугольника, если его площадь относится к площади квадрата, построенного на его основании, как $\sqrt{3}:12$.

111. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7 (см). Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания биссектрис данного треугольника.

112. Стороны треугольника относятся как *m:n:m*. Найти отношение площади этого треугольника к площади треугольника, вершинами которого являются основания биссектрис данного треугольника.

113. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что $AC_1 = \frac{1}{5}AB, BA_1 = \frac{1}{5}BC, CB_1 = \frac{1}{5}CA.$ Найти $S_{A_1B_1C_1}, если S_{ABC} = S.$

114. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что $BA_1 = \frac{1}{3}BC, CB_1 = \frac{1}{3}CA, AC_1 = \frac{1}{3}AB.$ Что больше: S_{MNP} или $S_{AMC_1} + S_{BA_1N} + S_{CB_1P}$ (см. рис. 35)?

115. Через точку внутри ΔABC проведены прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разделяют ΔABC на 6 фигур, три из которых – треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найти S_{ABC} (рис. 32).

Рис. 31. *Рис. 32.*

Ответы и указания к решениям задач

94. Достаточно выразить R из формулы 4 для площади треугольника. Сама формула 4 получена из формулы 2 заменой sinC из теоремы синусов.

95. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

96. Каждая из перечисленных площадей составляет третью часть площади ΔABC. Докажем это утверждение для ΔAOC (рис. 31). Проведем из вершины B высоту BN треугольника ABC, а из вершины O – высоту OK треугольника AOC, тогда $S_{AOC}:S_{ABC}=OK:BN$ (опорная задача 92). Из подобия треугольников BNД и OKД вытекает $\dfrac{BN}{OK} = \dfrac{ВД}{ОД}, но \dfrac{ВД}{ОД} = 3$ (опорная задача 1), поэтому $S_{AOC} = \dfrac{1}{3} S_{AOC}$.

Рис. 33. *Рис. 34.* *Рис. 35.*

97. Так как три треугольника AOB, AOC и BOC составляют вместе ΔABC и площади их равны, то площадь каждого из этих трех треугольников равна $\dfrac{1}{3} S_{ABC}$. Так как эти треугольники имеют с треугольником ABC общее основание, то высота каждого из треугольников, проведенная из вершины O, равна третьей части высоты ΔABC, опущенной на ту же сторону (задача 92). Из подобия треугольников BNД и OKД (рис. 31) получаем, что точка O делит отрезок ВД в отношении 2:1, считая от вершины. В таком же отношении точка O делит отрезки AM и CL. Докажем, что O – точка пересечения медиан

ΔABC. Пусть P – точка пересечения медиан ΔABC, $ВД_1$, AM_1, CL_1 – медианы ΔABC. Допустим, что точки P и O различны. Тогда $\Delta OCP \sim \Delta LCL_1$ (рис. 32) с коэффициентом $\frac{2}{3}$, так как по условию задачи CO:CL=2:3 и по задаче 1 $CP:CL_1=2:3$, а угол C у этих треугольников общий. Поэтому $OP \| LL_1$, но сторона LL_1 есть сторона AB. Аналогично доказывается, что $OP \| AC$ (надо рассмотреть подобные треугольники OBP и $ВД_1$ – рис. 32). Получилось, что отрезок OP должен быть параллелен двум сторонам треугольника, чего быть не может, поэтому допущение о том, что точки P и O различны, неверно. Следовательно, эти точки совпадают, т.е. O – точка пересечения медиан ΔABC.

98. Решение этой задачи основано на опорной задаче 92 и аналогично решению предыдущей задачи 97.

99. $\frac{15}{7}, \frac{20}{7}$. Пусть на рис. 23 AB=3, BC=4, BB_1 – данная биссектриса. Пусть h – высота, опущенная из вершины B на сторону AC. Тогда $S_{ABB_1} = \frac{1}{2} AB_1 \cdot h, S_{BB_1C} = \frac{1}{2} B_1Ch.$ По задаче 74 $AB_1=3x$, $B_1C=4x$. Так как $AB_1+B_1C=AC$, то $AC=7x$, откуда $x = \frac{AC}{7}$. Из формулы $S_{ABC} = \frac{1}{2} ACh \text{ находим } h = \frac{10}{AC}$, так как $S_{ABC}=5$ по условию задачи. Подставляя найденные значения x и h в формулы для площадей треугольников ABB_1 и BB_1C, получаем ответ задачи.

100. R=12,5 см, r=3 см. Прежде всего заметим, что $7^2+24^2=25^2$, поэтому данный треугольник прямоугольный и $R = \frac{25}{2}$ (задача 2). Из формулы 3 $r = \frac{S}{p}, \text{где } S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24$ ($см^2$) как площадь прямоугольного треугольника.

101. $\sqrt{37} \text{ или } \sqrt{13}$. По формуле 2

$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin\alpha, \text{по условию } S = 3\sqrt{3}, \text{поэтому } \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha=60°$ или $\alpha=120°$, $\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$. Третью сторону треугольника найдем по теореме косинусов.

102. $\sqrt{b^2+c^2-\frac{6}{5}bc} \text{ или } \sqrt{b^2+c^2+\frac{6}{5}bc}$ – 2 решения, полученных так же, как в задаче 101.

103. 270 см². Продолжим медиану на расстояние, равное ее длине (рис.1), тогда $S_{ABC} = S_{AВД} = \frac{1}{2}S$ параллелограмма АВСД. Три стороны ΔАВД известны, его площадь вычисляем по формуле Герона.

104. $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Поскольку все углы треугольника известны, то можно найти две его стороны из теоремы синусов: a=2Rsin15°, b=2Rsin60°=$R\sqrt{3}$. Площадь треугольника вычисляем по формуле 2, где ∠C=105°.

105. $\sqrt{3}$ см. Легко найти, что острые углы этого прямоугольного треугольника равны 30° и 60°, поэтому катеты этого треугольника равны $\frac{c}{2}$ и $\frac{c\sqrt{3}}{2}$, где c – гипотенуза, а высота из вершины прямого угла равна $\frac{c\sqrt{3}}{4}$. Тогда площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 2\sqrt{3}$, откуда находим c^2, а затем c и высоту $\frac{c\sqrt{3}}{4}$.

106. $2(7+4\sqrt{3})$ см². Воспользуемся формулой S=pr. Для этого выразим стороны треугольника через r (см. рис. 33). Из ΔВКО $BO = \frac{OK}{\sin 60°} = \frac{r}{\sin 60°} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.$Тогда\ ВД = BO + ОД = \frac{2r}{\sqrt{3}} + r = \frac{(2+\sqrt{3})r}{\sqrt{3}}$. Но ВД есть высота равнобедренного треугольника АВС, поэтому $AB = 2ВД = \frac{2(2+\sqrt{3})r}{\sqrt{3}}, АД = ВДtg60° = (2+\sqrt{3})r$.$Полупериметр\ p = AB + АД =$

$$= \frac{(7+4\sqrt{3})r}{\sqrt{3}}. S = \frac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}r^2 = \frac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\sqrt{12} = 2(7+4\sqrt{3})\,(см^2).$$

107. 60 см². Воспользуемся опорной задачей 25 и теоремой Пифагора. Пусть a=15 см, тогда c–b=9, c^2–b^2=225. Отсюда $c+b = \frac{225}{9} = 25$. Решая совместно два уравнения: c–b=9 и c+b=25, находим b=8 (см).

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

108. Пусть М – точка касания гипотенузы с вписанной окружностью, АМ=m, МВ=n (рис. 6). Тогда АК=АМ, BN=BM по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки. CK=CN=r, где r – радиус вписанной окружности. Тогда АС=m+r, СВ=n+r, АВ=m+n. По теореме Пифагора $AB^2=AC^2+CB^2$, откуда получаем $2mn=2r^2+2(m+n)r$, или $r^2+(m+n)r=mn$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot CB = \frac{1}{2}(m+r)(n+r) = \frac{1}{2}(mn + (m+n)r + r^2)) =$$

$$= \frac{1}{2}(mn + mn) = mn,$$

так как выражение $(m+n)r+r^2$ в скобках равно mn по ранее доказанному.

109. Дано, что $a+b=\ell$, СД=h (рис. 5). Так как $\ell=a+b$, то, возводя в квадрат обе части этого равенства, имеем $\ell^2=a^2+b^2+2ab$.

По теореме Пифагора $a^2+b^2=c^2$, а по формулам 1 и 2 для площади треугольника $S = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{2}ab,$ т.е. $ab=hc$. Поэтому $\ell^2=c^2+2hc$. Получили квадратное уравнение $c^2+2hc-\ell^2=0$ относительно с (ℓ, h – данные величины). Это уравнение имеет один положительный корень $c = \sqrt{h^2+\ell^2} - h.$ *Поэтому* $S = \frac{1}{2}h(\sqrt{h^2+\ell^2} - h).$

110. 30°, 30°, 120°. Пусть a – основание, b – боковая сторона, α – угол при основании равнобедренного треугольника. Тогда по условию задачи $\frac{1}{2}ab\sin\alpha : a^2 = \sqrt{3} : 12,$ *или* $b\sin\alpha : a = \sqrt{3} : 6.$ *С другой стороны,* $\frac{a}{2} = b\cos\alpha,$ откуда $a=2b\cos\alpha$. Подставляя вместо a найденное значение, получаем $tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$ *откуда* $\alpha = 30°.$

111. $\frac{210\sqrt{6}}{143}$. Найдем площадь треугольника АВС по формуле Герона.

$S_{ABC} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}.$ Идея решения состоит в нахождении площадей треугольников C_1BA_1, C_1AB_1, A_1CB_1, используя задачи 74 и 93 (рис. 23, на котором нужно провести отрезки C_1A_1, A_1B_1, B_1C_1). Пусть АВ=5см, ВС=6 см, АС=7 см. Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{7}{6}(\textit{задача}74),\textit{поэтому}\ AC_1=\frac{7}{13}AB=\frac{35}{13}(\textit{см}),C_1B=\frac{6}{13}AB=\frac{30}{13}(\textit{см}).$$

$$\textit{Аналогично},\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{5}{6},BA_1=\frac{5}{12}BC=\frac{5}{2}(\textit{см}),A_1C=\frac{7}{12}BC=\frac{7}{2}(\textit{см}),\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{5}{6},$$

$$AB_1=\frac{5}{11}AC=\frac{35}{11}(\textit{см}),B_1C=\frac{42}{11}(\textit{см}).$$

$$\textit{По задаче}\ 93\frac{S_{C_1BA_1}}{S_{ABC}}=\frac{BC_1\cdot BA_1}{AB\cdot BC}=\frac{BC_1}{AB}\cdot\frac{BA_1}{BC}=\frac{6}{13}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{26},\textit{следовательно},$$

$$S_{C_1BA_1}=\frac{5}{26}S_{ABC}.$$

$$\textit{Аналогично},\frac{S_{C_1AB_1}}{S_{ABC}}=\frac{AC_1\cdot AB_1}{AB\cdot AC}=\frac{7}{13}\cdot\frac{5}{11}=\frac{35}{13\cdot 11},S_{C_1AB_1}=\frac{35}{13\cdot 11}S_{ABC}.$$

$$\frac{S_{A_1CB_1}}{S_{ABC}}=\frac{A_1C\cdot B_1C}{BC\cdot AC}=\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}=\frac{7}{22},S_{A_1CB_1}=\frac{7}{22}S_{ABC}.$$

$$\textit{Тогда}\ S_{C_1B_1A_1}=S_{ABC}-S_{C_1BA_1}-S_{C_1AB_1}-S_{A_1CB_1}=(1-\frac{5}{26}-\frac{35}{13\cdot 11}-\frac{7}{22})S_{ABC}=\frac{35}{143}S_{ABC}=$$

$$=\frac{35}{143}6\sqrt{6}=\frac{210\sqrt{6}}{143}.$$

112. $\dfrac{(m+n)^2}{mn}.$

113. $\dfrac{13}{25}S.$

$$S_{C_1BA_1}=\frac{1}{2}BC_1\cdot BA_1\sin B(\textit{рис}.34),\textit{но}\ BC_1=\frac{4}{5}AB,BA_1=\frac{1}{5}BC,$$

$$\textit{поэтому}\ S_{C_1BA_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}S_{ABC}=\frac{4}{25}S,$$

$$\textit{так как}\ S=S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B.$$

$$\textit{Аналогично},S_{C_1AB_1}=\frac{4}{25}S,S_{A_1CB_1}=\frac{4}{25}S.\textit{Поэтому}\ S_{A_1B_1C_1}=$$

$$=S-S_{C_1BA_1}-S_{C_1AB_1}-S_{A_1CB_1}=S-\frac{12}{25}S=\frac{13}{25}S.$$

Решение будет короче, если воспользоваться задачей 93.

114. Эти площади равны. Действительно,

$$S_{ABA_1}=\frac{1}{2}AB\cdot BA_1\sin B=\frac{1}{2}AB\frac{1}{3}BC.\sin B=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B)=\frac{1}{3}S_{ABC}\ (\textit{рис}.31).$$

Обозначим S_{ABC}=S. Тогда $S_{ABA_1}=S_{BCB_1}=S_{CAC_1}=\frac{1}{3}S.$

Запишем, из площадей каких фигур состоят площади указанных треугольников:

$$S_{ABA_1} = S_{AC_1M} + S_{C_1MNB} + S_{BNA_1} = \frac{1}{3}S,$$

$$S_{BCB_1} = S_{BNA_1} + S_{A_1NPC} + S_{CPB_1} = \frac{1}{3}S,$$

$$S_{CAC_1} = S_{CPB_1} + S_{B_1PMA} + S_{AC_1M} = \frac{1}{3}S.$$

Соединим эти равенства почленно:

$$2(S_{AC_1M} + S_{BNA_1} + S_{CPB_1}) + S_{C_1MNB} + S_{A_1NPC} + S_{B_1PMA} = S$$

и заметим, что выражение

$$S - S_{C_1MNB} - S_{A_1NPC} - S_{B_1PMA} - S_{AC_1M} - S_{BNA} - S_{CB_1P} \text{ равно}$$

$$S_{AC_1M} + S_{BNA_1} + S_{CPB_1},$$

а с другой стороны оно равно S_{MNP}, как это видно из рис. 35.

115. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. Для решения важно заметить, что все три треугольника подобны треугольнику ABC и, что четырехугольники BNMД, LAKM, FMEC – параллелограммы. Поэтому ВД=MN, BN=MД, LA=MK, AK=LM, ME=FC, MF=EC. Обозначим S_{ABC}=S и воспользуемся отношением площадей подобных треугольников (задача 91).

$$\frac{S_1}{S} = \frac{MN^2}{BC^2} = \frac{ВД^2}{BC^2}, \text{следовательно}, \frac{ВД}{BC} = \sqrt{\frac{S_1}{S}}.$$

$$\text{Аналогично}, \frac{S_2}{S} = \frac{ДЕ^2}{BC^2}, \frac{S_3}{S} = \frac{EC^2}{BC^2}, \text{т.е.} \frac{ДЕ}{BC} = \sqrt{\frac{S_2}{S}}, \frac{EC}{BC} = \sqrt{\frac{S_3}{S}}.$$

$$1 = \frac{BC}{BC} = \frac{ВД + ДЕ + EC}{BC} = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}},$$

$$\text{откуда } S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

Рис. 36

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов Н.П. и др. Сборник задач по элементарной математике. – М.: Наука, 1969.

2. Вересова Е.Е. и др. Практикум по решению математических задач. – М.: Просвещение, 1979.

3. Гусев В.А. и др. Практикум по решению математических задач: Геометрия. – М.: Просвещение, 1985.

4. Гусев В.А. Как помочь школьнику полюбить математику? Часть I. – М.: Авангард, 1994.

5. Егерев В.К. и др. Сборник задач для поступающих во втузы /Под ред. М.И. Сканави. – М.: Высш. шк., 1990.

6. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1976.

7. Пойа Д. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1961.

8. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975.

9. Силаев Е.В. Использование дополнительных построений при решении геометрических задач. - М.: Прометей, 1994.

10. Шарыгин И.Ф. Геометрия 7 (теория и задачи). – М.: МИРОС, 1995.

Н.Е. Марюкова, Н.И. Васечкина,
Н.М. Руденкова

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ И ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Методическое пособие по решению задач

Заведующий редакционно-издательским отделом ***Д.А. Рубцов***

Редакторы ***В.Н. Тришина, Д.А. Рубцов***

Компьютерный набор и верстка ***С.А. Горцунова***

Подписано в печать 21.12.03 г. Формат 60х84 1/16. Печать офсетная. Бумага писчая. Гарнитура Таймс. Усл.п.л. 2,32. Уч.-издл. 2,0. Тираж 500 экз. Заказ № ___
Редакционно-издательский отдел Брянского института повышения квалификации работников образования
241000, Россия, город Брянск, улица Бежицкая, дом 34 «А»
телефон (0832) 681059